DOUĂ MODELE DE REGRESIE A CREDIBILITĂȚII

Ph.D. Constanța-Nicoleta BODEA
Academia de Studii Economice Bucureşti

Lect. univ. dr. Virginia ATANASIU
Academia de Studii Economice Bucureşti

Rezumat:

În această comunicare vom dezbate două modele de regresie a credibilității din Matematicile de Asigurări Non-Viață, ce pot fi rezolvate prin intermediul teoriei matricelor.

În primul model de regresie a credibilității, pornind de la o reprezentare bine cunoscută a formulei de inversare pentru o clasă specială de matrice, prima de risc va fi calculată pentru un contract cu parametrul de risc $\boldsymbol{\theta}$.

În următorul model de regresie a credibilității, vom obține o soluție de credibilitate sub forma unei combinații liniare a estimării individuale (bazate pe datele unui stat particular) şi a estimării colective (bazată pe datele agregate din SUA).

Pentru ilustrarea soluției cu proprietățile mai sus menționate, sunt necesare teorema bine cunoscută de reprezentare a inversei pentru o clasă de matrice, proprietățile urmei unei matrice pătratice, produsul scalar a doi vectori, norma legată de o matrice pozitiv definită dată în prealabil, precum şi proprietățile matematice complicate ale probabilităților condiționate şi ale co-varianțelor condiționate.

Cuvinte cheie: prima de risc, calcule de credibilitate, parametru de risc, prima netă de risc.

SECȚIUNEA 1

În primul model de regresie a credibilității, pornind de la o reprezentare bine cunoscută a formulei inversei pentru o clasă specială de matrice, prima de risc va fi calculată pentru un contract cu parametrul de risc θ.

După unele remarci introductive motivatorii, vom stabili presupunerile modelului în detaliu.

TWO REGRESSION CREDIBILITY MODELS

Ph.D. Constanța-Nicoleta BODEA
Academy of Economic Studies Bucharest

Ph.D. Virginia ATANASIU
Academy of Economic Studies Bucharest

Abstract:

In this communication we will discuss two regression credibility models from Non – Life Insurance Mathematics that can be solved by means of matrix theory.

In the first regression credibility model, starting from a well-known representation formula of the inverse for a special class of matrices a risk premium will be calculated for a contract with risk parameter $\boldsymbol{\theta}$.

In the next regression credibility model, we will obtain a credibility solution in the form of a linear combination of the individual estimate (based on the data of a particular state) and the collective estimate (based on aggregate USA data).

To illustrate the solution with the properties mentioned above, we shall need the well-known representation theorem for a special class of matrices, the properties of the trace for a square matrix, the scalar product of two vectors, the norm with respect to a positive definite matrix given in advance and the complicated mathematical properties of conditional expectations and of conditional covariances.

Key words: the risk premium, the credibility calculations, risk parameter, *the net risk premim.*

SECTION 1

In the first regression credibility model, starting from a well-known representation formula of the inverse for a special class of matrices a risk premium will be calculated for a contract with risk parameter θ.

After some motivating introductory remarks, we state the model assumptions in more

În acest sens, considerăm *un contract* (sau o poliță de asigurare) cu parametrul de risc θ *necunoscut și fixat* , pe o perioadă de $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{ti}}}{t}$ ($\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{mai}\\ \textit{mult}\\ \textit{sau}\\ \textit{egal}\\ \textit{cu}2}}{\geq}$ 2) ani. Variabila aleatoare θ conține caracteristicile de risc ale poliței. Din acest motiv, vom numi θ *parametrul de risc al poliței.*

Contractul este un vector aleator ($\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{tita}}}{\theta}$, $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{ex}\\ \textit{tilda}\\ \textit{prima}\\ (\textit{transpus})}}{\underset{\sim}{X'}}$) format din parametrul de structură θ și din variabilele observabile $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{ex}\\ \textit{unu}}}{X_1}$, $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{ex}\\ \textit{doi}}}{X_2}$, …, $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{ex}\\ \textit{ti}}}{X_t}$, unde $\underset{\sim}{X'}$ $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{egual}\\ \textit{cu}}}{=}$ (X_1, X_2, …, X_t) este vectorul observațiilor (sau vectorul aleator $(1\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{un}\\ \textit{ti}}}{\times}t)$ al observațiilor). Astfel, contractul este format dintr-un vector de variabile, sau dintr-o pereche de variabile, sau dintr-un cuplu de variabile:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{tita}}}{\theta}\ ,\ \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{ex}\\ \textit{gei}}}{X_j}\ , \text{where } j = 1, \ldots, t$$

Pentru acest model, ce implică doar un singur contract izolat și pentru care s-a observat un risc cu parametrul de risc θ pentru t ani, vrem să estimăm *cantitatea* $\mu_j(\theta)$, adică valoarea medie condiționată a lui $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{ex}\\ \textit{gei}}}{X_j}$, dat fiind $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{tita}}}{\theta}$:

$$E(X_j \,|\, \theta),$$

care este *prima netă de risc* pentru *contractul cu parametrul de risc* θ din anul $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{gei}}}{j}$ *, unde*

detail.

In this sense, we consider *one contract* (or *an insurance policy*) with *unknown* and *fixed* risk parameter θ, during a period of $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{ti}}}{t}$ ($\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{more}\\ \textit{or}\\ \textit{equal}\\ \textit{to}\\ \textit{two}}}{\geq}$ 2) years. The random variable θ contains the risk characteristics of the policy. For this reason, we shall call θ *the risk parameter of the policy.*

The contract is a random vector ($\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{tita}}}{\theta}$, $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{ex}\\ \textit{tilda}\\ \textit{prime}\\ (\textit{transposed})}}{\underset{\sim}{X'}}$) consisting of the structure parameter θ and the observable variables $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{ex}\\ \textit{one}}}{X_1}$, $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{ex}\\ \textit{two}}}{X_2}$, …, $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{ex}\\ \textit{ti}}}{X_t}$, where $\underset{\sim}{X'}$ $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{equal}\\ \textit{to}}}{=}$ (X_1, X_2, …, X_t) is the vector of observations (or the observed random $(1\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{one}\\ \textit{ti}}}{\times}t)$ vector). Thus, the contract consists of the set of variables:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{tita}}}{\theta}\ ,\ \underset{\substack{\uparrow\\ \textit{ex}\\ \textit{gei}}}{X_j}\ , \text{where } j = 1, \ldots, t$$

For the model, which involves only one isolated contract and having observed a risk with risk parameter θ for t years we want to *forecast/estimate* the quantity $\mu_j(\theta)$, that is the conditional expectation of the $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{ex}\\ \textit{gei}}}{X_j}$, being given $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{tita}}}{\theta}$:

$$E(X_j \,|\, \theta)$$

which is *the net risk premim* for *the contract* with *risk parameter* θ from *the* $\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{gei}}}{j}$ *year,* where

$j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de} \\ \text{la} \\ \text{unu} \\ \text{la} \\ \text{ti}}}{=} 1, \ldots, t$. Datorită inflației, vom introduce ipoteza regresiei, ce afirmă că prima netă de risc $\mu_j(\theta)$ se schimbă în timp, după cum urmează:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{miu} \\ \text{gei} \\ \text{al} \\ \text{tita}}}{\mu_j(\theta)} = E(X_j \mid \theta) = \underbrace{\underset{\sim}{Y'_j}\,\underset{\sim}{b}(\theta)}_{\substack{\uparrow \\ \text{uai} \\ \text{tilda} \\ \text{prima} \\ \text{gei} \\ \text{inmultit} \\ \text{cu} \\ \text{bi} \\ \text{tilda} \\ \text{al} \\ \text{tita}}},\ j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de} \\ \text{la} \\ \text{unu} \\ \text{la} \\ \text{ti}}}{=} 1, \ldots, t,$$

unde $\underset{\sim}{Y_j}$ este un vector $(q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chiu} \\ \text{unu}}}{\times} 1)$ cunoscut ne-aleator, aşa-numitul *vector proiectat* sau *vector design, cu* $j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de} \\ \text{la} \\ \text{unu} \\ \text{la} \\ \text{ti}}}{=} 1, \ldots, t$ şi unde $\underset{\substack{\sim \\ \uparrow \\ \text{bi} \\ \text{tilda} \\ \text{al} \\ \text{tita}}}{b}(\theta)$ este un vector $(q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chiu} \\ \text{unu}}}{\times} 1)$ necunoscut aleator, aşa-numitul *vector de regresie,* ce conține constantele de regresie necunoscute.

Printr-o alegere potrivită a lui $\underset{\substack{\sim \\ \uparrow \\ \text{uai} \\ \text{gei}}}{Y_j}$ (presupus a fi cunoscut), se pot introduce efectele timpului asupra primei de risc.

Astfel, dacă vectorul proiectat sau vectorul design $\underset{\sim}{Y_j}$ este ales, de exemplu, după cum urmează: - matricea $(2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{doi} \\ \text{unu}}}{\times} 1)$, cu componentele: pe prima linie $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{unu}}}{1}$, pe a doua linie $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{gei}}}{j}$, adică:

$j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{goes} \\ \text{from} \\ \text{one} \\ \text{to} \\ \text{ti}}}{=} 1, \ldots, t$. Because of inflation, we make *the regression assumption,* which affirms that the pure net risk premium $\mu_j(\theta)$ changes in time, as follows:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{miu} \\ \text{gei} \\ \text{of} \\ \text{tita}}}{\mu_j(\theta)} = E(X_j \mid \theta) = \underbrace{\underset{\sim}{Y'_j}\,\underset{\sim}{b}(\theta)}_{\substack{\uparrow \\ \text{uai} \\ \text{tilda} \\ \text{prime} \\ \text{gei} \\ \text{multiplied} \\ \text{by} \\ \text{bi} \\ \text{tilda} \\ \text{of} \\ \text{tita}}},\ j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{goes} \\ \text{from} \\ \text{one} \\ \text{to} \\ \text{ti}}}{=} 1, \ldots, t,$$

where $\underset{\sim}{Y_j}$ is an known non-random $(q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chiu} \\ \text{one}}}{\times} 1)$ vector, the so-called *design vector,* with $j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{goes} \\ \text{from} \\ \text{one} \\ \text{to} \\ \text{ti}}}{=} 1, \ldots, t$ and where $\underset{\substack{\sim \\ \uparrow \\ \text{bi} \\ \text{tilda} \\ \text{of} \\ \text{tita}}}{b}(\theta)$ is an unknown random $(q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chiu} \\ \text{one}}}{\times} 1)$ vector, the so-called *regression vector,* which contains the unknown regression constants.

By a suitable choice of the $\underset{\substack{\sim \\ \uparrow \\ \text{uai} \\ \text{gei}}}{Y_j}$ (assumed to be known), time effects on the risk premium can be introduced.

Thus, if the design vector $\underset{\sim}{Y_j}$ is for example chosen as follows:-the $(2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{two} \\ \text{one}}}{\times} 1)$ matrix

$\underset{\sim}{Y_j} = \underset{\sim}{Y_j^{(2,1)}} = \begin{pmatrix}1\\ j\end{pmatrix}$, atunci rezultă o *inflație liniară* de următorul tip:

$$\mu_j(\theta) = b_1(\theta) + jb_2(\theta),\ j = 1, \ldots, t, \text{ unde}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ bi\\ tilda\\ al\\ tita}}{\underset{\sim}{b}}(\theta) \underset{\substack{\uparrow\\ este\\ egal\\ cu\\ coloana\\ vector\rightarrow}}{=} \underbrace{(b_1(\theta), b_2(\theta))'}_{\substack{cu\\ componente:\\ bi,one,of,tita\\ si\\ bi,two,of,tita}}.$$

De asemenea, dacă vectorul proiectat sau vectorul design $\underset{\substack{\uparrow\\ uai\\ gei}}{\underset{\sim}{Y_j}}$ este ales, de exemplu, după cum urmează: - matricea (3×1); cu componentele: pe prima linie $\underset{\substack{\uparrow\\ unu}}{1}$, pe a doua linie $\underset{\substack{\uparrow\\ gei}}{j}$, şi pe ultima linie $\underset{\substack{\uparrow\\ gei\\ patrat}}{j^2}$, adică:

$\underset{\sim}{Y_j} = \underset{\sim}{Y_j^{(3,1)}} = \begin{pmatrix}1\\ j\\ j^2\end{pmatrix}$, atunci vom obține o tendință de inflație pătratică de următoarea formă:

$$\mu_j(\theta) = b_1(\theta) + jb_2(\theta) + j^2b_3(\theta),\ j = 1, \ldots, t,$$

unde $\underset{\substack{\uparrow\\ bi\\ tilda\\ al\\ tita}}{\underset{\sim}{b}}(\theta) \underset{\substack{\uparrow\\ este\\ egal\\ cu\\ coloana\\ vector\rightarrow}}{=} \underbrace{(b_1(\theta), b_2(\theta), b_3(\theta))'}_{\substack{cu\\ componentele:\\ bi,one,of,tita\\ bi,two,of,tita\\ si\\ bi,free,of,tita}}$

Utilizând faptul că matricea A este *pozitiv definită*, dacă forma pătratică $\underline{x}'A\underline{x}$ este pozitivă pentru fiecare $\underline{x} \neq \underline{0}$, unde A este o matrice $(n \underset{\substack{\uparrow\\ en\\ en}}{\times} n)$, $\underline{x}$ este un vector coloană de dimensiune $(n\times 1)$ şi $\underline{0}$ este vectorul coloană de dimensiune $(n\times 1)$, cu toate componentele zero, putem defini ipotezele modelului. Presupunem că:

with the components: on the first line $\underset{\substack{\uparrow\\ one}}{1}$, on the second line $\underset{\substack{\uparrow\\ gei}}{j}$, that is:

$\underset{\sim}{Y_j} = \underset{\sim}{Y_j^{(2,1)}} = \begin{pmatrix}1\\ j\end{pmatrix}$, then results a *linear inflation* of the next type:

$$\mu_j(\theta) = b_1(\theta) + jb_2(\theta),\ j = 1, \ldots, t, \text{ where}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ bi\\ tilda\\ of\\ tita}}{\underset{\sim}{b}}(\theta) \underset{\substack{\uparrow\\ is\\ equal\\ to\\ the\\ column\\ vector\rightarrow}}{=} \underbrace{(b_1(\theta), b_2(\theta))'}_{\substack{with\\ the\\ components:\\ bi,one,of,tita\\ and\\ bi,two,of,tita}}.$$

Also, if the design vector $\underset{\substack{\uparrow\\ uai\\ gei}}{\underset{\sim}{Y_j}}$ is for example chosen as follows:-the $(3 \underset{\substack{\uparrow\\ free\\ one}}{\times} 1)$ matrix with the components: on the first line $\underset{\substack{\uparrow\\ one}}{1}$, on the second line $\underset{\substack{\uparrow\\ gei}}{j}$, on the last line $\underset{\substack{\uparrow\\ gei\\ squared}}{j^2}$, that is:

$\underset{\sim}{Y_j} = \underset{\sim}{Y_j^{(3,1)}} = \begin{pmatrix}1\\ j\\ j^2\end{pmatrix}$, then we obtain a *quadratic inflationary trend* of the next form:

$$\mu_j(\theta) = b_1(\theta) + jb_2(\theta) + j^2b_3(\theta),\ j = 1, \ldots, t,$$

where $\underset{\substack{\uparrow\\ bi\\ tilda\\ of\\ tita}}{\underset{\sim}{b}}(\theta) \underset{\substack{\uparrow\\ is\\ equal\\ to\\ the\\ column\\ vector\rightarrow}}{=} \underbrace{(b_1(\theta), b_2(\theta), b_3(\theta))'}_{\substack{with\\ the\\ components:\\ bi,one,of,tita\\ bi,two,of,tita\\ and\\ bi,free,of,tita}}$

Using the fact that a matrix A is *positive definite,* if the quadratic form $\underline{x}'A\underline{x}$ is positive for every $\underline{x} \neq \underline{0}$, where A is an $(n \underset{\substack{\uparrow\\ en\\ en}}{\times} n)$ matrix, $\underline{x}$ a

(1) Ipoteza regresiei, care afirmă că prima netă pură de risc $\mu_j(\theta)$ pentru contractul cu parametrul de risc θ din anul $\underset{\overset{\uparrow}{gei}}{j}$ se schimbă în timp, după cum urmează:

$\mu_j(\theta) = \underset{\sim}{Y}_j^{'}\ \underset{\sim}{b}(\theta), j = 1, \ldots, t$, unde vectorul $(q \times 1)$ proiectat sau design $\underset{\sim}{Y}_j$ este cunoscut, cu $j = 1, \ldots, t$ şi $\underset{\sim}{b}(\theta)$ este un vector de regresie necunoscut ($\underset{\sim}{b}(\theta)$ este un vector coloană de dimensiune $(1 \times q)$) şi că

(2) matricele $\underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{\Lambda}^{(q,\, q)} = Cov[\underset{\sim}{b}(\theta)]$, $\underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{\phi}^{(t,\, t)} = E[Cov(\underset{\sim}{X} \mid \theta)]$ sunt *pozitiv definite* [$\underset{\sim}{\Lambda}$ este matricea de co-varianțe a vectorului de regresie $\underset{\sim}{b}(\theta)$, şi $\underset{\sim}{\phi}$ este valoarea medie a matricei de co-varianțe condiționate a observațiilor $\underset{\sim}{X}$, dat fiind θ].

Scopul principal al teoriei regresiei credibilității este dezvoltarea unei expresii pentru estimatorul de credibilitate $\tilde{\mu}_j$ a primei nete pure de risc $\mu_j(\theta)$, bazată pe observațiile $\underset{\sim}{X}$.

Din acest motiv, ne trebuie următoarea *lemă* din algebra liniară, ce ne dă formula de reprezentare a inversei pentru o clasă specială de matrice.

Lema 1. Fie $\underset{\sim}{A}$ o matrice $(\underset{\overset{\uparrow}{ar}}{r} \times \underset{\overset{\uparrow}{es}}{s})$ şi $\underset{\sim}{B}$ o matrice $(s \times r)$. Inversa matricei $(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{B})$ este dată de formula de mai jos:

$$(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{B})^{-1} = \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{B}\ \underset{\sim}{A})^{-1}\underset{\sim}{B},$$

column vector of length n and $\underline{0}$ is a vector of zeros, we can give the hypotheses of the model. We assume that:

(3) the *regression assumption,* which affirms that the pure net risk premium $\mu_j(\theta)$ for the contract with risk parameter θ from the $\underset{\overset{\uparrow}{gei}}{j}$ year changes in time, as follows:

$\mu_j(\theta) = \underset{\sim}{Y}_j^{'}\ \underset{\sim}{b}(\theta), j = 1, \ldots, t$, where the $(q \times 1)$ design vector $\underset{\sim}{Y}_j$ is known, with $j = 1, \ldots, t$ and $\underset{\sim}{b}(\theta)$ is an unknown regression vector ($\underset{\sim}{b}(\theta)$ is a column vector of length q) and that

(4) the matrices $\underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{\Lambda}^{(q,\, q)} = Cov[\underset{\sim}{b}(\theta)]$, $\underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{\phi}^{(t,\, t)} = E[Cov(\underset{\sim}{X} \mid \theta)]$ are *positive definite* [$\underset{\sim}{\Lambda}$ is the covariance matrix of the regression vector $\underset{\sim}{b}(\theta)$, and $\underset{\sim}{\phi}$ is the expectation for the conditional covariance matrix of the observations $\underset{\sim}{X}$, being given θ].

The *main* purpose of regression credibility theory is the development of an expression for the credibility estimator $\tilde{\mu}_j$ of the pure net risk premium $\mu_j(\theta)$ based on the observations $\underset{\sim}{X}$.

For this reason, we need the following *lemma* from linear algebra, which gives the *representation formula of the inverse for a special class of matrices.*

Lemma 1. Let $\underset{\sim}{A}$ be an $(\underset{\overset{\uparrow}{ar}}{r} \times \underset{\overset{\uparrow}{es}}{s})$ matrix and $\underset{\sim}{B}$ an $(s \times r)$ matrix. Then the inverse of the dacă inversele există şi unde $\underset{\sim}{I}$ reprezintă matricea ($r \times r$) de identitate.

În final, vom introduce următoarea notaţie pentru valoarea medie a vectorului de regresie $E[\underset{\sim}{b}(\theta)] = \underset{\sim}{\beta}$.

Acum suntem în măsură, să determinăm *alegerea optimă a estimatorului de credibilitate* $\tilde{\mu}_j$ pentru prima netă pură de risc $\mu_j(\theta)$ pe baza observaţiilor $\underset{\sim}{X}$.

În contextul ipotezelor (1) şi (2), estimatorul de credibilitate $\tilde{\mu}_j$ pentru prima netă pură de risc $\mu_j(\theta)$ pe baza observaţiilor $\underset{\sim}{X}$, este dat de următoarea relaţie:

$$\tilde{\mu}_j = \underset{\sim}{Y_j}'[\underset{\sim}{Z}\hat{\underset{\sim}{b}} + (\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{Z})\underset{\sim}{\beta}],$$

cu:

$$\hat{\underset{\sim}{b}} = (\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{\phi}^{-1}\underset{\sim}{Y})^{-1}\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{\phi}^{-1}\underset{\sim}{X}$$

şi:

$$\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{\Lambda}\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{\phi}^{-1}\underset{\sim}{Y}(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{\Lambda}\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{\phi}^{-1}\underset{\sim}{Y})^{-1},$$

unde $\underset{\sim}{Y}$ este *generalizarea* vectorului proiectat (design) $\underset{\sim}{Y_j}$, aşa-numita *matrice proiectată* (*design*) din *ipoteza* de *regresie* (1), scrisă sub forma:

$\underset{\sim}{\mu}^{(t,1)} = E(\underset{\sim}{X} \mid \theta) = \underset{\sim}{Y}\,\underset{\sim}{b}(\theta)$ şi unde $\underset{\sim}{I}$ denotă matricea unitate de dimensiune ($q \times q$), pentru j fixat.

matrix $(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B})$ is given by the below formula:

$$(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B})^{-1} = \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{A})^{-1}\underset{\sim}{B}, \text{ if}$$

the displayed inverses exist and where $\underset{\sim}{I}$ denotes the ($r \times r$) identity matrix.

We finally introduce the following *notation* for the expectation of the regression vector $E[\underset{\sim}{b}(\theta)] = \underset{\sim}{\beta}$.

Now, we are ready to determine the *optimal choice* of the *credibility estimator* $\tilde{\mu}_j$ for the pure net risk premium $\mu_j(\theta)$ based on the observations $\underset{\sim}{X}$.

Under the hypotheses (1) and (2) the credibility estimator $\tilde{\mu}_j$ for the pure net risk premium $\mu_j(\theta)$ based on the observations $\underset{\sim}{X}$ is given by the following relation:

$$\tilde{\mu}_j = \underset{\sim}{Y_j}'[\underset{\sim}{Z}\hat{\underset{\sim}{b}} + (\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{Z})\underset{\sim}{\beta}],$$

with:

$$\hat{\underset{\sim}{b}} = (\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{\phi}^{-1}\underset{\sim}{Y})^{-1}\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{\phi}^{-1}\underset{\sim}{X}$$

and:

$$\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{\Lambda}\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{\phi}^{-1}\underset{\sim}{Y}(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{\Lambda}\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{\phi}^{-1}\underset{\sim}{Y})^{-1},$$

where $\underset{\sim}{Y}$ is *the generalization* of the design vector $\underset{\sim}{Y_j}$, the so-called *design matrix* from the *regression assumption* (1) written of the next type:

$\underset{\sim}{\mu}^{(t,1)} = E(\underset{\sim}{X} \mid \theta) = \underset{\sim}{Y}\,\underset{\sim}{b}(\theta)$ and where $\underset{\sim}{I}$

[$\underset{\sim}{\mu}^{(t,1)}$ = ($\mu_1(\theta)$, $\mu_2(\theta)$, …, $\mu_t(\theta)$)' este vectorul (t × 1) al primelor nete anuale de risc pentru contractul cu parametrul de risc θ şi $\underset{\sim}{Y}$ este o matrice (t × q) dată în prealabil, de rang complet q (q ≤ t)].

Ne reamintim faptul că matricea A este de rang complet, dacă rangul său este egal cu $\underbrace{\min(n,m)}_{\substack{\uparrow \\ \min imum \\ \text{int}\,re \\ en \\ si \\ em}}$, unde A este o matrice (n × m).

Acum, vom da demonstraţia expresiei de mai sus pentru estimatorul de credibilitate $\tilde{\mu}_j$ al primei nete pure de risc $\mu_j(\theta)$, pe baza observaţiilor $\underset{\sim}{X}$. Estimatorul de credibilitate $\tilde{\mu}_j$ al lui $\mu_j(\theta)$ bazat pe $\underset{\sim}{X}$ este un estimator liniar de forma:

$$\tilde{\mu}_j = \gamma_0 + \underset{\sim}{\gamma}' \underset{\sim}{X} \quad (1),$$

care satisface ecuaţiile normale (2) şi (3):

$$E(\tilde{\mu}_j) = E[\mu_j(\theta)] \quad (2)$$

$$Cov(\tilde{\mu}_j, \underset{\sim}{X}') = Cov[\mu_j(\theta), \underset{\sim}{X}'] \quad (3),$$

unde γ_0 este o constantă scalară şi $\underset{\sim}{\gamma}$ este un vector constant (t × 1). Coeficienţii γ_0 şi $\underset{\sim}{\gamma}$ sunt aleşi astfel încât ecuaţiile normale să fie satisfacute.

După inserarea lui (1) în (3), obţinem următoarea relaţie:

$$\underset{\sim}{\gamma}' Cov(\underset{\sim}{X}) = Cov[\mu_j(\theta), \underset{\sim}{X}'] \quad (4),$$ unde:

denotes the (q × q) identity matrix, for some fixed j. [$\underset{\sim}{\mu}^{(t,1)}$ = ($\mu_1(\theta)$, $\mu_2(\theta)$, …, $\mu_t(\theta)$)' is the (t × 1) vector of the yearly net risk premiums for the contract with risk parameter θ and $\underset{\sim}{Y}$ is an (t × q) matrix given in advance of full rank q (q ≤ t)].

We recall the fact that a matrix A is of *full rank* if its rank is $\underbrace{\min(n,m)}_{\substack{\uparrow \\ the \\ \min imum \\ between \\ en \\ and \\ em}}$, where A is an (n × m) matrix.

Now, we give the proof of the above expression for the credibility estimator $\tilde{\mu}_j$ of the pure net risk premium $\mu_j(\theta)$ based on the observations $\underset{\sim}{X}$. The credibility estimator $\tilde{\mu}_j$ of $\mu_j(\theta)$ based on $\underset{\sim}{X}$ is a linear estimator of the form:

$$\tilde{\mu}_j = \gamma_0 + \underset{\sim}{\gamma}' \underset{\sim}{X} \quad (1),$$

which satisfies the normal equations (with the numbers two and free):

$$E(\tilde{\mu}_j) = E[\mu_j(\theta)] \quad (2)$$

$$Cov(\tilde{\mu}_j, \underset{\sim}{X}') = Cov[\mu_j(\theta), \underset{\sim}{X}'] \quad (3),$$

where γ_0 is a scalar constant and $\underset{\sim}{\gamma}$ is a constant (t × 1) vector. The coefficients γ_0 and $\underset{\sim}{\gamma}$ are chosen such that the normal equations are satisfied.

After inserting (1) in (3), we obtains the following relation:

$$\underset{\sim}{\gamma}' Cov(\underset{\sim}{X}) = Cov[\mu_j(\theta), \underset{\sim}{X}']$$

$$Cov(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{\phi} + \underset{\sim}{Y}\,\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{Y}'$$

(5) şi:

$$Cov[\mu_j(\theta), \underset{\sim}{X}'] = \underset{\sim}{Y_j}'\,\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{Y}'$$

(6).

Calcule standard conduc la (5) şi (6). Astfel (4) devine:

$$\underset{\sim}{\gamma}'(\underset{\sim}{\phi} + \underset{\sim}{Y}\,\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{Y}') = \underset{\sim}{Y_j}'\,\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{Y}'$$

Acum, aplicând Lema 1 concluzionăm că vom obţine următoarea formulă:

$$\underset{\sim}{\gamma}'\,\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{Y_j}'\,\underset{\sim}{Z}\,\underset{\sim}{\hat{b}}$$

(7)

Din (1), (2) şi (7), obţinem următoarele:

$$\gamma_0 = \underset{\sim}{Y_j'}(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{Z})\underset{\sim}{\beta}$$

Aceasta completează demonstraţia.

SECŢIUNEA 2

În modelul de regresie a credibilităţii, vom obţine soluţia de credibilitate sub forma unei combinaţii liniare a estimării individuale (bazate pe datele unui stat particular) şi a estimării colective (pe baza datelor agregate din SUA).

Pentur a ilustra soluţia cu proprietăţile mai sus menţionate, sunt necesare reprezentarea bine-cunoscută a teoremei inversei pentru o clasă specială de matrice, proprietăţile urmei pentru matricea pătratică, produsul scalar a doi vectori, norma legată de matricea pozitiv definită, dată în prealabil, precum şi proprietăţile matematice complicate ale valorilor medii condiţionate şi ale co-varianţelor condiţionate.

După unele remarci introductive motivatoare, vom prezenta ipotezele modelului în detaliu.

În acest sens, considerăm un portofoliu de

(4), where:

$$Cov(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{\phi} + \underset{\sim}{Y}\,\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{Y}'$$

(5) and:

$$Cov[\mu_j(\theta), \underset{\sim}{X}'] = \underset{\sim}{Y_j}'\,\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{Y}'$$

(6).

Standard computations lead to (5) and (6). Thus, (4) becomes:

$$\underset{\sim}{\gamma}'(\underset{\sim}{\phi} + \underset{\sim}{Y}\,\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{Y}') = \underset{\sim}{Y_j}'\,\underset{\sim}{\Lambda}\,\underset{\sim}{Y}'$$

Hence, applying Lemma 1 we conclude that takes place the next formula:

$$\underset{\sim}{\gamma}'\,\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{Y_j}'\,\underset{\sim}{Z}\,\underset{\sim}{\hat{b}}$$

(7)

From (1), (2) and (7), we obtain as follows:

$$\gamma_0 = \underset{\sim}{Y_j'}(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{Z})\underset{\sim}{\beta}$$

This completes the proof.

SECTION 2

In the next regression credibility model, we will obtain a credibility solution in the form of a linear combination of the individual estimate (based on the data of a particular state) and the collective estimate (based on aggregate USA data).

To illustrate the solution with the properties mentioned above, we shall need the well-known representation theorem for a special class of matrices, the properties of the trace for a square matrix, the scalar product of two vectors, the norm with respect to a positive definite matrix given in advance and the complicated mathematical properties of conditional expectations and of conditional covariances.

After some motivating introductory remarks, we state the model assumptions in more k contracte. Fie j fixat.

Contractul indexat cu j este un vector aleator (θ_j, $\underline{X}'_j$), constând dintr-un parametru de structură aleator θ_j (presupus a fi necunoscut şi fixat) şi din variabilele observabile $X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}$, unde $\underline{X}'_j \underset{\substack{\uparrow \\ egal \\ cu}}{=} (X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt})$ este vectorul observațiilor (sau vectorul (1 × t) aleator al observațiilor). Deci, contractul indexat cu j este format dintr-un set (cuplu, dublet) de variabile:

$\theta_j, X_{jq}, q = 1, \ldots, t$

Pentru modelul, care constă dintr-un portofoliu de k contracte, ne propunem *să estimăm* cantitatea $\mu_q(\theta_j)$, care este valoarea medie condiționată a lui X_{jq}, dat fiind θ_j:

$E(X_{jq} \mid \theta_j), q = 1, \ldots, t$

(care este prima netă de risc pentru contractul cu parametrul de risc θ_j din anul $\underset{\substack{\uparrow \\ chiu}}{q}$, unde $q \underset{\substack{\uparrow \\ int\,re \\ unu \\ si \\ ti}}{=} 1, \ldots, t$), sau ne propunem să estimăm valoarea medie condiționată a observațiilor $\underline{X}_j$, dat fiind θ_j:

$E(\underline{X}_j \mid \theta_j) = \underline{\mu}^{(t,1)}(\theta_j) = (\mu_1(\theta_j), \ldots, \mu_t(\theta_j))'$

(care este vectorul primelor nete de risc anuale pentru contractul cu parametrul de risc θ_j).

Datorită inflației, introducem *ipoteza regresiei* (sau restricționăm clasa de funcții admisibile $\mu_q(\cdot)$ la următoarea expresie):

$\underline{\mu}^{(t,1)}(\theta_j) = x^{(t,n)}\underline{\beta}^{(n,1)}(\theta_j)$, unde x este o matrice (t × n) dată în prealabil, de rang complet n (n ≤ t), aşa-numita *matricea proiectată* (*design*), şi unde $\underline{\beta}(\theta_j)$ este un vector (n × 1) aleator necunoscut, aşa-numitul *vector de regresie,* care conține constantele de regresie necunoscute.

Printr-o alegere potrivită a lui x (presupus că este cunoscut), putem introduce efectele în detail.

In this sense, we consider a portfolio of k contracts. Let j be fixed.

The contract indexed by j is a random vector (θ_j, $\underline{X}'_j$) consisting of a random structure parameter θ_j (assumed to be *unknown* and *fixed*) and the observable variables $X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt}$, where $\underline{X}'_j \underset{\substack{\uparrow \\ equal \\ to}}{=} (X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jt})$ is the vector of observations (or the observed random (1 × t) vector). So the contract indexed by j consists of the set of variables:

$\theta_j, X_{jq}, q = 1, \ldots, t$

For the model, which consists of a portfolio of k contracts we want to *forecast/estimate* the quantity $\mu_q(\theta_j)$, that is the conditional expectation of the X_{jq}, being given θ_j:

$E(X_{jq} \mid \theta_j), q = 1, \ldots, t$

(which is the net risk premium for the contract with risk parameter θ_j from the $\underset{\substack{\uparrow \\ chiu}}{q}$ year, where $q \underset{\substack{\uparrow \\ goes \\ from \\ one \\ to \\ ti}}{=} 1, \ldots, t$), or we want to *forecast/estimate* the conditional expectation of the observations $\underline{X}_j$, being given θ_j:

$E(\underline{X}_j \mid \theta_j) = \underline{\mu}^{(t,1)}(\theta_j) = (\mu_1(\theta_j), \ldots, \mu_t(\theta_j))'$

(which is the vector of the yearly net risk premiums for the contract with risk parameter θ_j).

Because of inflation, we make the *regression assumption* (or we restrict the class of admissible functions $\mu_q(\cdot)$ to the next):

$\underline{\mu}^{(t,1)}(\theta_j) = x^{(t,n)}\underline{\beta}^{(n,1)}(\theta_j)$, where x is an (t × n) matrix given in advance of full rank n (n ≤ t), the so-called *design matrix* and where $\underline{\beta}(\theta_j)$ is an unknown random (n × 1) vector, the so-called *regression vector,* which contains the unknown regression constants.

timp asupra primei de risc.

Astfel, dacă matricea proiectată (design) x este aleasă de exemplu, după cum urmează: - matricea (t×3) cu componentele: pe prima linie 1 (unu), 1 (unu), 1^2 (unu la pătrat), pe linia 2: 1 (unu), 2 (doi), 2^2 (doi pătrat),…, pe ultima linie 1 (unu), t(ti), t^2 (ti pătrat), adică:

$$x = x^{(t,\ 3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t & t^2 \end{bmatrix},$$

atunci vom obține o tendință de inflație pătratică, de următoarea formă:

$\mu_q(\theta_j) = \beta_1(\theta_j) + q\beta_2(\theta_j) + q^2\beta_3(\theta_j)$, q = 1, …, t, unde

$\underline{\beta}(\theta_j) = (\beta_1(\theta_j), \beta_2(\theta_j), \beta_3(\theta_j))'$.

De asemenea, dacă matricea proiectată x este aleasă, de exemplu, după cum urmează:

$$x = x^{(t,\ 2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t \end{bmatrix}$$

(ultima coloană din $x^{(t,\ 3)}$ este omisă), atunci rezultă o inflație liniară de următorul tip:

$\mu_q(\theta_j) = \beta_1(\theta_j) + q\beta_2(\theta_j)$, q = 1, …, t, unde

$\underline{\beta}(\theta_j) = (\beta_1(\theta_j), \beta_2(\theta_j))'$.

Pentru o *matrice fixă proiectată* (*design*) x şi pentru o *matrice fixă* de *ponderi* $\underbrace{v_j^{(t,t)}}_{vi\ gei\ ti\ ti}$, ipotezele modelului sunt:

(1) contractele reprezentate de perechile (cuplurile) $(\theta_j, \underline{X}_j)$, j = 1, …, k sunt independente, variabilele $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ sunt independente şi identic distribuite;

(2) ipoteza regresiei, ce afirmă că vectorul primelor nete anuale de risc pentru contractul cu parametrul de risc θ_j se

By a suitable choice of the x (assumed to be known), time effects on the risk premium can be introduced.

Thus, if the design matrix x is for example chosen, as follows:- the (t×3) matrix with the components: on the first line 1 (one), 1 (one), 1^2 (one squared), on the second line 1 (one), 2 (two), 2^2 (two squared),…, on the last line 1 (one), t(ti), t^2 (ti squared), that is:

$$x = x^{(t,\ 3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t & t^2 \end{bmatrix},$$

then we obtain a *quadratic inflationary trend* of the next form:

$\mu_q(\theta_j) = \beta_1(\theta_j) + q\beta_2(\theta_j) + q^2\beta_3(\theta_j)$, q = 1, …, t, where

$\underline{\beta}(\theta_j) = (\beta_1(\theta_j), \beta_2(\theta_j), \beta_3(\theta_j))'$.

Also, if the design matrix x is for example chosen, as follows:

$$x = x^{(t,\ 2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t \end{bmatrix}$$

(the last column of the $x^{(t,\ 3)}$ is omitted), then results a linear inflation of the next type:

$\mu_q(\theta_j) = \beta_1(\theta_j) + q\beta_2(\theta_j)$, q = 1, …, t, where

$\underline{\beta}(\theta_j) = (\beta_1(\theta_j), \beta_2(\theta_j))'$.

For some fixed *design matrix* x and a fixed *weight matrix* $\underbrace{v_j^{(t,t)}}_{vi\ gei\ ti\ ti}$, the hypotheses of this model are:

(3) the contracts represented by the pairs (the couples) $(\theta_j, \underline{X}_j)$, j = 1, …, k are independent, the variables $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ are independent and identically distributed;

schimbă în timp, după cum urmează: $\underline{\mu}^{(t,\,1)}(\theta_j) = x^{(t,\,n)}\underline{\beta}^{(n,\,1)}(\theta_j)$, unde matricea $(t \times n)$ proiectată (design) x este cunoscută şi $\underline{\beta}(\theta_j)$ este un vector de regresie necunoscut ($\underline{\beta}(\theta_j)$ este un vector coloană de dimensiune $(n\times 1)$, cu $j = 1, \ldots, k$);

(3) co-varianța condiționată a observațiilor $\underline{X}_j$ dat fiind θ_j, este egală cu: $Cov(\underline{X}_j | \theta_j) = \sigma^2(\theta_j)v_j^{(t,\,t)}$, unde $\sigma^2(\theta_j) = Var(X_{jr} | \theta_j)$, $r = 1, \ldots, t$ şi $v_j = v_j^{(t,\,t)}$ este o matrice de ponderi cunoscută, ne-aleatoare $(t \times t)$, având $rgv_j = t$, cu $j = 1, \ldots, k$.

Vom introduce *parametrii structurali*:

$s^2 = E[\sigma^2(\theta_j)]$, $a^{(n,\,n)} = Cov[\underline{\beta}(\theta_j)]$, $\underline{b}^{(n,\,1)} = E[\underline{\beta}(\theta_j)]$ şi *următoarele notații:*

$c_j^{(t,\,t)} = Cov(\underline{X}_j)$, $u_j^{(n,\,n)} = (x^1 v_j^{-1} x)^{-1}$, $z_j^{(n,\,n)} = a(a + s^2 u_j)^{-1}$ = [factorul de credibilitate rezultat pentru contractul j], unde $j = 1, \ldots, k$.

Înainte de a demonstra expresia primei liniare de regresie a credibilității, vom prezenta rezultatul clasic pentru vectorul de regresie, numit estimatorul GLS pentru $\underline{\beta}(\theta_j)$, bazat pe următoarea lemă din algebra liniară, ce oferă *teorema reprezentării pentru o clasă specială de matrice*.

Lema 2. Dacă C şi V sunt matrice $(t \times t)$, A o matrice $(n \times n)$ şi Y o matrice $(t \times n)$, şi C = $s^2V + YAY'$, atunci au loc următoarele

↑ *este data de formula din partea dreapta*

relații:

$(Y'C^{-1}Y)^{-1} = s^2(Y'V^{-1}Y)^{-1} + A$ şi

$(Y'C^{-1}Y)^{-1}Y'C^{-1} = (Y'V^{-1}Y)^{-1}Y'V^{-1}$

(4) the regression assumption, which affirms that the vector of the yearly net risk premiums for the contract with risk parameter θ_j changes in time, as follows: $\underline{\mu}^{(t,\,1)}(\theta_j) = x^{(t,\,n)}\underline{\beta}^{(n,\,1)}(\theta_j)$, where the $(t \times n)$ design matrix x is known and $\underline{\beta}(\theta_j)$ is an unknown regression vector ($\underline{\beta}(\theta_j)$ is a column vector of length n), whit $j = 1, \ldots, k$;

(3) the conditional covariance of the observations $\underline{X}_j$ being given θ_j is equal to: $Cov(\underline{X}_j | \theta_j) = \sigma^2(\theta_j)v_j^{(t,\,t)}$, where $\sigma^2(\theta_j) = Var(X_{jr} | \theta_j)$, $r = 1, \ldots, t$ and $v_j = v_j^{(t,\,t)}$ is a known non-random weight $(t \times t)$ matrix, having $rgv_j = t$, with $j = 1, \ldots, k$.

We introduce *the structural parameters:*

$s^2 = E[\sigma^2(\theta_j)]$, $a^{(n,\,n)} = Cov[\underline{\beta}(\theta_j)]$, $\underline{b}^{(n,\,1)} = E[\underline{\beta}(\theta_j)]$ and *the following notations:*

$c_j^{(t,\,t)} = Cov(\underline{X}_j)$, $u_j^{(n,\,n)} = (x^1 v_j^{-1} x)^{-1}$, $z_j^{(n,\,n)} = a(a + s^2 u_j)^{-1}$ = [the resulting credibility factor for contract j], where $j = 1, \ldots, k$.

Before proving the linearized regression credibility premium, we first give the classical result for the regression vector, namely the GLS – estimator for $\underline{\beta}(\theta_j)$ based on the following *lemma* from linear algebra, which gives *the representation theorem for a special class of matrices.*

Lemma 2. If C and V are $(t \times t)$ matrices, A an $(n \times n)$ matrix and Y a $(t \times n)$ matrix, and C

Prezentăm rezultatul *regresiei clasice*. Vectorul $\underline{B}_j$ minimizând distanța până la observațiile $\underline{X}_j$:

$$d(\underline{B}_j) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{data} \\ \text{de} \\ \text{aceasta} \\ \text{expresie}}}{=} (\underline{X}_j - x\underline{B}_j)' v_j^{-1} (\underline{X}_j - x\underline{B}_j), \text{ este}$$

următorul:

$\underline{B}_j = (x' v_j^{-1} x)^{-1} x' v_j^{-1} \underline{X}_j = u_j x' v_j^{-1} \underline{X}_j$, sau:

$\underline{B}_j = (x' c_j^{-1} x)^{-1} x' c_j^{-1} \underline{X}_j$ in case $c_j = s^2 v_j + xax'$.

Vom prezenta *demonstrația*. Prima egalitate rezultă din procedura de minimizare a formei pătratice implicată, a doua din Lema 2.

Fie P o matrice pozitiv definită, dată în prealabil.

Utilizând produsul scalar a doi vectori, definit astfel:

$< \underline{X}, \underline{Y} > = E[\underline{X}' P \underline{Y}]$, unde $\underline{X}$ este un vector coloană de dimensiune $(n \times 1)$ şi unde $\underline{Y}$ este un vector coloană de dimensiune $(n \times 1)$, norma $\|\cdot\|_p^2$ definită astfel:

$\|\underline{X}\|_p^2 = < \underline{X}, \underline{X} > = E[\underline{X}' P \underline{X}]$, unde $\underline{X}$ este un vector coloană de dimensiune $(n \times 1)$, proprietățile urmei pentru o matrice pătratică (de exemplu, o variabilă scalară aleatoare este egală cu urma sa, cunoscut fiind faptul că pentru matricele $A^{(n,\ k)}$ şi $B^{(k,\ n)}$ avem urmele (AB): $Tr(AB) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{is} \\ \text{equal} \\ \text{to}}}{=}$ urma lui (BA): Tr(BA)), precum şi proprietățile matematice complicate ale valorilor medii condiționate şi ale co-varianțelor condiționate, putem acum să determinăm *prima liniară de regresie a credibilității:*

- cea mai bună estimare liniară, pentru valoarea medie condiționată a vectorului de regresie $\underline{\beta}(\theta_j)$, dat fiind $\underline{X}_j$, sau rezultatul de regresie a credibilității, astfel că cea mai bună estimare liniară a lui $E[\underline{\beta}(\theta_j) \mid \underline{X}_j]$ este $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{is} \\ \text{given} \\ \text{by} \\ \text{the} \\ \text{formula} \\ \text{from} \\ \text{the} \\ \text{right} \\ \text{hand} \\ \text{side}}}{=}$ $s^2V + YAY'$, then takes place the following relations:

$(Y' C^{-1} Y)^{-1} = s^2 (Y' V^{-1} Y)^{-1} + A$ and

$(Y' C^{-1} Y)^{-1} Y' C^{-1} = (Y' V^{-1} Y)^{-1} Y' V^{-1}$

We present *the classical regression result.* The vector $\underline{B}_j$ minimizing the weighted distance to the observations $\underline{X}_j$:

$$d(\underline{B}_j) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{given} \\ \text{by} \\ \text{this} \\ \text{expression}}}{=} (\underline{X}_j - x\underline{B}_j)' v_j^{-1} (\underline{X}_j - x\underline{B}_j),$$

reads as follows:

$\underline{B}_j = (x' v_j^{-1} x)^{-1} x' v_j^{-1} \underline{X}_j = u_j x' v_j^{-1} \underline{X}_j$, or

$\underline{B}_j = (x' c_j^{-1} x)^{-1} x' c_j^{-1} \underline{X}_j$ in case $c_j = s^2 v_j + xax'$.

We give *the proof.* The first equality results immediately from the minimization procedure for the quadratic form involved, the second one from Lemma 2.

Let P be a positive definite matrix given in advance.

Using the scalar product of two vectors, defined as:

(by) $< \underline{X}, \underline{Y} > = E[\underline{X}' P \underline{Y}]$, where $\underline{X}$ is a column vector of length n and $\underline{Y}$ is a column vector of length n, the norm $\|\cdot\|_p^2$ defined as:

$\|\underline{X}\|_p^2 = < \underline{X}, \underline{X} > = E[\underline{X}' P \underline{X}]$, where $\underline{X}$ is a column vector of length n, the properties of the trace for a square matrix (for example a scalar random variable trivially equals its trace, the well-known fact that for matrices $A^{(n,\ k)}$ and $B^{(k,\ n)}$ we have the trace of (AB): $Tr(AB) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{is} \\ \text{equal} \\ \text{to}}}{=}$ the trace of (BA): Tr(BA)) and complicated mathematical dată de relația (8):

$\underline{M}_j = z_j\underline{B}_j + (I - z_j)\underline{b}$ (8) şi:

- cea mai bună estimare liniară pentru valoarea medie condiționată a vectorului $\underline{\mu}(\theta_j)$, dat fiind $\underline{X}_j$, sau *estimarea credibilității* pentru $\underline{\mu}(\theta_j)$, deci cea mai bună estimare liniară a lui $E[x\underline{\beta}(\theta_j \mid \underline{X}_j]$, obținută prin multiplicarea la stânga a rezultatelor regresiei cu matricea proiectată (design), este dată de:

$x\underline{M}_j = x[z_j\underline{B}_j + (I - z_j)\underline{b}]$ (9),

unde $\underset{ai}{\underset{\uparrow}{I}}$ denotă matricea unitate de dimensiune (n × n).

Remarcăm faptul că rezultatele regresiei credibilității sunt date ca versiunea matriceală a unui amestec (a unei mixturi) convex(e) a rezultatului clasic de regresie $\underline{B}_j$ şi a rezultatului colectiv $\underline{b}$.

Pentru a putea utiliza cele mai bune rezultate liniare ale credibilității obținute în acest model, vom construi estimatori utili pentru parametrii de structură, utilizând teoria matricelor, produsul scalar a doi vectori, norma şi conceptul de perpendicularitate legat de o matrice pozitiv definită, dată în prealabil, precum şi o extensie a teoremei lui Pitagora – ce afirmă următoarele:

$\underline{X} \underset{\substack{\uparrow \\ perpendicular \\ pe}}{\perp} \underline{Y} \Leftrightarrow ||\underline{X} + \underline{Y}||_p^2 = ||\underline{X}||_p^2 + ||\underline{Y}||_p^2$ (unde $\underline{X}$ este un vector coloană de dimensiune $(n \times 1)$, $\underline{Y}$ un vector coloană de dimensiune $(n \times 1)$ şi $P = P^{(n, n)}$ o matrice pozitiv definită (P o matrice pătratică de dimensiune (n × n)), proprietățile urmei pentru o matrice pătratică şi proprietățile matematice complicate ale valorilor medii condiționate şi ale co-varianțelor condiționate.

properties of conditional expectations and of conditional co variances, we can now derive *the linearized regression credibility premium:*

- the best linearized estimate for the conditional expectation of the regression vector $\underline{\beta}(\theta_j)$, being given $\underline{X}_j$, or the regression credibility result, so the best linearized estimate of $E[\underline{\beta}(\theta_j) \mid \underline{X}_j]$ is given by (eit):

$\underline{M}_j = z_j\underline{B}_j + (I - z_j)\underline{b}$ (8) and:

- the best linearized estimate for the conditional expectation of the vector $\underline{\mu}(\theta_j)$, being given $\underline{X}_j$, or the *credibility estimate* for $\underline{\mu}(\theta_j)$, so the best linearized estimate of $E[x\underline{\beta}(\theta_j \mid \underline{X}_j]$, obtained multiplying the regression results from the left by the design matrix, is given by (the nain):

$x\underline{M}_j = x[z_j\underline{B}_j + (I - z_j)\underline{b}]$ (9),

where $\underset{ai}{\underset{\uparrow}{I}}$ denotes the (n × n) identity matrix.

We remark the fact that the *regression credibility* results are given as the matrix version of a convex mixture of the classical regression result $\underline{B}_j$ and the collective result $\underline{b}$.

To be able to use the better linear credibility results obtained in this model, we will provide useful estimators for the structure parameters, using the matrix theory, the scalar product of two vectors, the norm and the concept of perpendicularity with respect to a positive definite matrix given in advance, an extension of Pythagoras' theorem – which affirms the followings:

$\underline{X} \underset{\substack{\uparrow \\ perpendicular \\ to}}{\perp} \underline{Y} \Leftrightarrow ||\underline{X} + \underline{Y}||_p^2 = ||\underline{X}||_p^2 + ||\underline{Y}||_p^2$ (where $\underline{X}$ is a column vector of length n $\underline{Y}$ is a column vector of length n and $P = P^{(n, n)}$ a

Astfel, după ce s-a obținut rezultatul credibilității bazat pe parametrii structurali (vezi (9)), trebuie să construim estimările acestor parametrii, care reprezintă principalele rezultate ale lucrării.

Fiecare vector $\underline{B}_j$ este un estimator nedeplasat pentru $\underline{b}$. La fel şi fiecare combinație liniară de tipul $\Sigma\alpha_j\underline{B}_j$, unde vectorul de matricelor $(\alpha_j^{(n,\ n)})_{j\ =\ \overline{1,k}}$ este astfel încât are loc următoarea formulă:

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j^{(n,n)} = I^{(n,\,n)} \qquad (10)$$

Alegerea optimă a lui $\alpha_j^{(n,\ n)}$ este determinată de următoarea teoremă:

Teorema 1. Soluția optimă a problemei de minim:

$$\operatorname*{Min}_{\underline{\alpha}} d(\underline{\alpha}), \text{ unde:}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ di\\ of\\ alfa}}{d}(\underline{\alpha}) = \left\|\underline{b} - \sum_j \alpha_j \underline{B}_j\right\|_P^2 = E\left[\left(\underline{b}-\sum_j\alpha_j\underline{B}_j\right)' P \cdot \left(\underline{b}-\sum_j\alpha_j\underline{B}_j\right)\right]$$

(este distanța de la o combinație liniară de tipul $(\sum_j \alpha_j \underline{B}_j)$ la parametrii $\underline{b}$), $P = P^{(n,\ n)}$ o matrice dată în prealabil, pozitiv definită, cu vectorul de matrice $\underline{\alpha} = (\alpha_j)_{j\ =\ \overline{1,k}}$ ce satisface (10), este dată de următoarea formulă:

$$\underset{\sim}{\hat{b}}^{(n,\ 1)} = Z^{-1}\sum_{j=1}^{k} z_j \underline{B}_j \text{ , unde } Z = \sum_{j=1}^{k} z_j \text{ şi } z_j$$

este definit ca:

$$z_j = a(a + s^2u_j)^{-1}, j = \overline{1,k} .$$

Teorema de mai sus oferă estimarea parametrilor $\underline{b}$ din modelul de regresie a credibilității. În cazul în care numărul de observatii t_j din contractul j este mai mare decât numarul n al constantelor de regresie, următorul rezultat este un estimator given positive definite matrix (P an (n × n) matrix), the properties of the trace for a square matrix and complicated mathematical properties of conditional expectations and of conditional covariances.

Thus, after the credibility result based on the structural parameters is obtained (see (9)) one has to construct estimates for these parameters, which represents the main results of the paper.

Every vector $\underline{B}_j$ gives an unbiased estimator of $\underline{b}$. Consequently, so does every linear combination of the type $\Sigma\alpha_j\underline{B}_j$, where the vector of matrices $(\alpha_j^{(n,\ n)})_{j\ =\ \overline{1,k}}$ is such that takes place the next formula:

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j^{(n,n)} = I^{(n,\,n)} \qquad (10)$$

The *optimal* choice of $\alpha_j^{(n,\ n)}$ is determined in the following theorem:

Theorem 1. The optimal solution to the minimization problem:

$$\operatorname*{Min}_{\underline{\alpha}} d(\underline{\alpha}), \text{ where:}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ di\\ of\\ alfa}}{d}(\underline{\alpha}) = \left\|\underline{b} - \sum_j \alpha_j \underline{B}_j\right\|_P^2 = E\left[\left(\underline{b}-\sum_j\alpha_j\underline{B}_j\right)' P \cdot \left(\underline{b}-\sum_j\alpha_j\underline{B}_j\right)\right]$$

(is the distance from the linear combination of the type $(\sum_j \alpha_j \underline{B}_j)$ to the parameters $\underline{b}$), $P = P^{(n,\ n)}$ a given positive definite matrix, with the vector of matrices $\underline{\alpha} = (\alpha_j)_{j\ =\ \overline{1,k}}$ satisfying (10), is given by the following formula:

$$\underset{\sim}{\hat{b}}^{(n,\ 1)} = Z^{-1}\sum_{j=1}^{k} z_j \underline{B}_j \text{ , where } Z = \sum_{j=1}^{k} z_j \text{ and}$$

z_j is defined as:

$$z_j = a(a + s^2u_j)^{-1}, j = \overline{1,k} .$$

The above theorem gives the *estimation* nedeplasat al lui s^2:

$$\hat{s}_j^2 = \frac{1}{t_j - n}(\underline{X}_j - x_j\underline{B}_j)'(\underline{X}_j - x_j\underline{B}_j)$$

Astfel $\hat{s}_j^2$ oferă un estimator nedeplasat al lui s^2 pentru fiecare grup de contracte.

Fie K numărul de contracte j, cu $t_j \underset{\substack{\uparrow\\ \text{mai mult decat}}}{>} n$.

Dacă:

$$\hat{s}^2 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{este dat de formula}}}{=} \frac{1}{K}\sum_{j;t_j>n} \hat{s}_j^2,$$ atunci va avea loc relația:

$$E(\hat{s}^2) = s^2.$$

Deci, $\hat{s}^2$ oferă un estimator nedeplasat pentru s^2 din modelul regresiei.

Pentru a, prezentăm un pseudo-estimator nedeplasat, definit în funcție de el însuşi, astfel încât poate fi calculat doar iterativ.

Următoarea variabilă aleatoare are o valoarea medie egală cu a:

$$\hat{a} = \frac{1}{k-1}\sum_j z_j(\underline{B}_j - \hat{\underline{b}})(\underline{B}_j - \hat{\underline{b}})'$$

Un alt estimator nedeplasat pentru a este următorul:

of the *parameters* $\underline{b}$ in this regression credibility model.

In case the number of observations t_j in the j contract is larger than the number of regression constans n, the following is an unbiased estimator of s^2:

$$\hat{s}_j^2 = \frac{1}{t_j - n}(\underline{X}_j - x_j\underline{B}_j)'(\underline{X}_j - x_j\underline{B}_j)$$

So the $\hat{s}_j^2$ gives an unbiased estimator of s^2 for each contract group.

Let K denote the number of contracts j, with $t_j \underset{\substack{\uparrow\\ \text{more than}}}{>} n$. If:

$$\hat{s}^2 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{is given by the formula}}}{=} \frac{1}{K}\sum_{j;t_j>n} \hat{s}_j^2$$ then takes place the relation:

$$E(\hat{s}^2) = s^2$$

So the $\hat{s}^2$ gives an unbiased estimator for s^2 in this regression model.

For a, we give an unbiased pseudo-estimator, defined in terms of itself, so it can only be computed iteratively.

The following random variable has expected value a:

$$\hat{a} = \frac{1}{k-1}\sum_j z_j(\underline{B}_j - \hat{\underline{b}})(\underline{B}_j - \hat{\underline{b}})'$$

Another unbiased estimator for a is the following:

$$a^* = \frac{1}{(w_.^2 - \sum w_j^2}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_i w_j(\underline{B}_i - \underline{B}_j)(\underline{B}_i - \underline{B}_j)' - \hat{s}^2\sum_{j=1}^{k} w_j(w. - w_j)u_j\right\}$$

Concluzii

Teoria matricelor oferă posibilități de calcul ale estimatorilor utili pentru parametrii de structură.

Din punct de vedere practic, proprietatea de

Conclusions

The matrix theory provided the means to calculate useful estimators for the structure parameters.

From the practical point of view the

nedeplasare a acestor estimatori este foarte atractivă.

Studiul se bazează pe aceste elemente din algebra liniară. Teoria probabilităților şi teoria statisticii sunt utilizate foare mult în teoria credibilității. Referințele sunt luate din domeniul actuariatului.

Bibliografie

Articole din Jurnale

[1] *Atanasiu*, *V*.: **Calcule de credibilitate,** Revista „Studii şi Cercetări de Calcul Economic şi Cibernetică Economică" 4 / 1998, XXXII.

[2] *Atanasiu*, *V*.: **A credibility regression model,** ***(Un Model de regresie a credibilității)*** Revista „Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research" 1-4 / 1998, XXXII.

[3] *Atanasiu*, *V*.: **Estimatorii de credibilitate din modelul clasic al lui Bühlmann,** Revista „Informatică Economică", volumul III, nr.10, trimestrul II / 1999.

Cărți

[4] *Goovaerts*, *M.J*., *Kaas*, *R*., *Van Herwaarden*, *A.E*., *Bauwelinckx*, *T*.: **Insurance Series**, volume 3, **Efective Actuarial Methods**, University of Amsterdam, The Netherlands, 1991.

[5] *Pentikäinen*, *T*., *Daykin*, *C.D*., and *Pesonen*, *M*.: **Practical Risk Theory for Actuaries,** Université Pierré et Marie Curie, 1990.

[6] Sundt, B.: **An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics,** Veroffentlichungen des Instituts für Versicherungswissenschaft der Universität Mannheim Band 28, VVW Karlsruhe, 1984.

property of unbiasedness of these estimators is very appealing and very attractive.

The study is based on these elements from linear algebra. The probability theory and the statistics are used very much in the credibility theory. The references are given from the area of actuary.

Bibliograpy

Journal Articles

[1] *Atanasiu*, *V*.: **Calcule de credibilitate,** Revista „Studii şi Cercetări de Calcul Economic şi Cibernetică Economică" 4 / 1998, XXXII.

[2] *Atanasiu*, *V*.: **A credibility regression model,** Revista „Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research" 1-4 / 1998, XXXII.

[3] *Atanasiu*, *V*.: **Estimatorii de credibilitate din modelul clasic al lui Bühlmann,** Revista „Informatică Economică", volumul III, nr.10, trimestrul II / 1999.

Books

[4] *Goovaerts*, *M.J*., *Kaas*, *R*., *Van Herwaarden*, *A.E*., *Bauwelinckx*, *T*.: **Insurance Series**, volume 3, **Efective Actuarial Methods**, University of Amsterdam, The Netherlands, 1991.

[5] *Pentikäinen*, *T*., *Daykin*, *C.D*., and *Pesonen*, *M*.: **Practical Risk Theory for Actuaries,** Université Pierré et Marie Curie, 1990.

[6] Sundt, B.: **An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics,** Veroffentlichungen des Instituts für Versicherungswissenschaft der Universität Mannheim Band 28, VVW Karlsruhe, 1984.